أولاً :

$f(x) = \ln(4-x^2)$

$D =]-2,2[$

الدالة معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]-2,2[$

$\lim\limits_{x \to -2^{>}} [f(x)] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^{<}} [f(x)] = -\infty$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{4-x^2}$

$f'(x) = 0 \quad x = 0 \quad f(0) = \ln 4$

x	-2		0		2
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖	↗	$\ln 4$	↘	‖
	$-\infty$				$-\infty$

إذا $f(0) = \ln 4$ فيه كبرى شاملة

المجموع 60

ثانياً :

التمرين الأول :

• عند تعويض الصفر نحصل على حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$ يوجد جذر ممذوف للصفر

$$\frac{5x^2 + x\sin x}{\tan^2 x - 3x^2} = \frac{5 + \frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan^2 x}{x^2} - 3}$$

• $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$ وبما أن

• $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan x}{x}\right) = 1$ إذاً

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{5x^2 + x\sin x}{\tan^2 x - 3x^2}\right) = \frac{5+1}{1-3} = -3$$

50

التمرين الثاني : عدد المجاهيل $n=3$

$$H = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -3 & 8 \end{array}\right]$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & -3 & 8 \end{array}\right]$$

$3R_1 + R_2 \to R_2$

$-4R_1 + R_3 \to R_3$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & 4 \\ 0 & 16 & -11 & 4 \end{array}\right]$$

$2R_2 + R_3 \to R_3$

$$H \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right]$$

$r_1 = r_2 = 3 \quad n=3$ ومنه

$r = r' = n$ للجملة حل وحيد

$x - 3y + 2z = 1 \quad (1)$

$-8y + 7z = 4 \quad (2)$

$3z = 12 \quad (3)$

من (3) نجد $\boxed{z = \frac{12}{3} = 4}$

نعوض في (2) نجد $-8y + 28 = 4 \Rightarrow \boxed{y = 3}$

نعوض في (1) نجد $x + 3(3) + 2(4) = 1$

$\boxed{x = 2}$

مجموعة الحل الوحيد $S = \{(2,3,4)\}$

60

التمرين الثالث : القطع المكافئ.

المعادلة من الشكل

20 $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$

10 المحرق $y = 3 \Leftarrow y_0 = 3$

$F(x_0+c, y_0)$ $F'(x_0-c, y_0)$

5 $F(0,0)$ $F'(-2,0)$

ذروتا القطر الكبير

5 $A(x_0+a, y_0)$ $A'(x_0-A, y_0)$

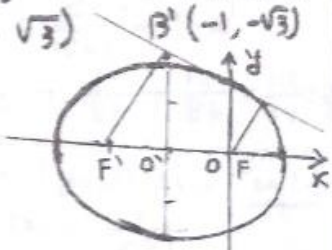
$A(1,0)$ $A'(-3,0)$

ذروتا القطر الصغير

5 $B(x_0, y_0+b)$ $B'(x_0, y_0-b)$

$B(-1, \sqrt{3})$ $B'(-1, -\sqrt{3})$

10



5 التحقق: $N\left(0, \frac{3}{2}\right)$

تحقق $\frac{1}{4} + \frac{9/4}{3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

نستعمل علاقة القطع بالنسبة x

10 $\frac{2(x+1)}{4} + \frac{2yy'}{3} = 0$

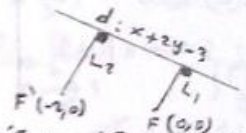
$x=0$ $y=\frac{3}{2}$ نعوض $y'x = m$

5 $\frac{2}{4} + \frac{2\frac{3}{2}m}{3} = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$

5 معادلة المماس: $y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x-0)$

$d: x + 2y - 3 = 0$

ويمكن حساب البعد باستخدام القانون



بالاعتماد على المستقيم المقطع عن مستقيم مواز

5 $L_1 = \frac{|1-3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

5 $L_2 = \frac{|-2-3|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

5 $L_1 \cdot L_2 = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = 3$

90

10 الدليل $\begin{cases} x=5 \\ p=-2 \end{cases} \Leftarrow x = x_0 - p$

$5 = x_0 + 2$

10 $x_0 = 3$

المعادلة

10 $(y-3)^2 = -8(x-3)$

60 ثالثاً: دراسة

السؤال الأول: تحليل.

$D = [0, +\infty[\setminus \{1\}$

10 أو $D = [0,1[\cup]1, +\infty[$

20 $f(x) - y_\Delta = \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})}$

10 $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_\Delta] = 0$

10 ومنه $y = x$ مقارب للخط C

وبما أن $f(x) - y_\Delta = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$		$-$	‖	$+$	
	C فوق المقارب	C تحت المقارب	‖	C فوق المقارب	

20 الوضع النسبي

70

السؤال الثاني: قطع ناقص

$3x^2 + 6x + 4y^2 - 9 = 0$

$3(x^2 + 2x + 1 - 1) + 4y^2 = 9$

$3(x+1)^2 + 4y^2 = 12$

10 $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

5 قطع ناقص مركزه $O'(-1, 0)$

5 المحور المحرقي يوازي $x'x$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

5 $b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}$

$c^2 = a^2 - b^2 = 1$ ، $c = 1$

السؤال الثالث: الاحتمال

B صندوق البطاقات الثلاث تحمل أرقاماً أولية
A صندوق " " " " فردية

الأرقام الفردية 1 3 5 7 9
الأرقام الأولية 2 3 5 7

المطلوب $P(A \cup B)$

10 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

10 $P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{60}{504}$

10 $P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{24}{504}$

10 $P(A \cap B) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{504}$

10 $P(A \cup B) = \frac{60}{504} + \frac{24}{504} - \frac{6}{504} = \frac{78}{504}$

حل آخر بالتوافيق:

$P(A) = \frac{C(5,3)}{C(9,3)} = \frac{10}{84}$

$P(B) = \frac{C(4,3)}{C(9,3)} = \frac{4}{84}$

$P(A \cap B) = \frac{C(3,3)}{C(9,3)} = \frac{1}{84}$

$P(A \cup B) = \frac{10}{84} + \frac{4}{84} - \frac{1}{84} = \frac{13}{84}$

المتغير العشوائي

5 $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

5 $f(0) = P(\bar{1}\,\bar{3}\,\bar{7}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{60}{504}$

5 $f(1) = P(1\,\bar{3}\,\bar{7}) \cdot 3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot 3 = \frac{240}{504}$

5 $f(2) = P(1\,3\,\bar{7}) \cdot 3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot 3 = \frac{180}{504}$

5 $f(3) = P(1\,3\,7) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{24}{504}$

حل آخر بالتوافيق:

$f(0) = \frac{C(5,3)}{C(9,3)} = \frac{10}{84}$

$f(1) = \frac{C(4,1) \cdot C(5,2)}{C(9,3)} = \frac{40}{84}$

$f(2) = \frac{C(4,2) \cdot C(5,1)}{C(9,3)} = \frac{30}{84}$

$f(3) = \frac{C(4,3)}{C(9,3)} = \frac{4}{84}$

5

r_i	0	1	2	3
$f(r_i)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

5 $E(X) = \sum_{k=1}^{4} r_k f(r_k)$

5 $E(X) = \frac{40}{84} + \frac{60}{84} + \frac{12}{84} = \frac{112}{84} = \frac{4}{3}$

(20)

ثانياً: مسألة التحليل الرياضي:

$f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$

الدالة معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$

5 مستمرة واشتقاقية على كل من المجالات

$]-\infty, -1[\ ,\ ]-1, 1[\ ,\ ]1, +\infty[$

5 • $\lim_{x \to -\infty} [f(x)] = 0 \Rightarrow y = 0$ مقارب منطبق على $x'x$ والمقارب نحو ox^-

5 • $\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = 0 \Rightarrow y = 0$ منطبق على $x'x$ والمقارب نحو ox^+

5 • $\lim_{x \to 1} [f(x)] = +\infty$ } $x = 1$ مقارب يوازي $y'y$ ، c على يمين المقارب عند oy^+

5 $\lim_{x \to 1} [f(x)] = -\infty$ } $x = 1$ مقارب يوازي $y'y$ ، c على يسار المقارب عند oy^-

5 $\lim_{x \to -1} [f(x)] = -\infty$ } $x = -1$ مقارب // $y'y$ ، c على يمين المقارب عند oy^-

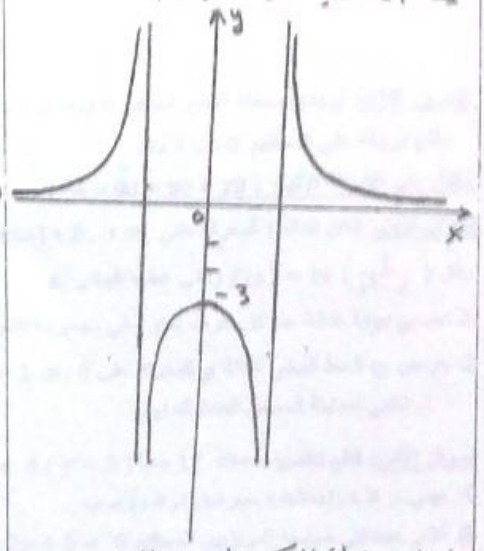
5 $\lim_{x \to -1} [f(x)] = +\infty$ } $x = -1$ مقارب // $y'y$ ، c على يسار المقارب عند oy^+

$f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2-1)^2}$ ·

$f'(x) = 0 \quad x = 0 \quad f(0) = -3$

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

$f(0) = -3$ قيمة كبرى محلية



إيجاد معادلة المماس عند $y = 1$:

عندما $y = 1$ نجد

$1 = \dfrac{3}{x^2-1}$

$x^2 - 1 = 3$

$x^2 = 4$

نقطتا التماس

إذا $x = 2$ ومنه $N_1(2, 1)$

أو $x = -2$ $N_2(-2, 1)$

حساب ميل كل من المماسين

$f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2-1)^2}$

عند $x = 2$ نجد $m_1 = f'(2) = \dfrac{-12}{9} = \dfrac{-4}{3}$

معادلة المماس الأول عند N_1

$y - 1 = \dfrac{-4}{3}(x - 2)$

عند $x = -2$ نجد $f'(-2) = \dfrac{12}{9} = \dfrac{4}{3}$

معادلة المماس الثاني عند N_2

$y - 1 = \dfrac{4}{3}(x + 2)$

120